UNED CALATAYUD *Anuario del Centro de la Universidad Nacional de Educación a Distancia en Calatayud. N.º 23, pp. 243-270, 2017*

MODELO DE EVOLUCIÓN DE POBLACIÓN HUMANA DE MALTHUS

Andrés MARTÍN SÁNCHEZ
Estudiante de Grado en Matemáticas de la UNED de Calatayud

Resumen: En este artículo se detallan las resoluciones a las actividades propuestos en la asignatura Herramientas Informáticas para la Matematica del segundo curso del Grado en Matemáticas. Así, se recrean en Maxima y Scilab (y adicionalmente en Excel y Geogebra) diversas situaciones de modelos de población y alimentos, constatándose la ocurrencia o no del fenómeno conocido como catástrofe malthusiana (predicho por Tomas Maltus) según el cual el crecimiento de población sigue una ley exponencial, mientras que el de alimentos es aritmético por lo que según que situación no habrá suficiente alimento para la población mundial.

Palabras clave: Catástrofe malthusiana, maxima, scilab, hoja de cálculo, geogebra.

Abstract: In this article we give detail to the solutions relative to the proposed activities in the subject Informatic Tools for Maths of the second course in the Maths Degree. So, several situations of population models and food are recreated in Maxima and Scilab (and additionally in Excel and Geogebra), confirming the occurrence (or not) of the phenomena known as Malthusian catastrophe (predicted by Tomas Maltus) according to which, the growth of the population follows an exponential law, while food growth follows an arithmetical law, and therefore, depending on the situation, there won´t be enough food to feed the world population.

Keywords: Malthusian catastrophe, maxima, scilab, worksheet, geogebra.

El presente trabajo recoge las soluciones a las actividades propuestas en la Prueba de Evaluación a Distancia de la asignatura Herramientas Informáticas para las Matemáticas del Grado en Matemáticas, estando formado el Equipo Docente por D. Fernando Morilla García y D. Miguel Ángel Rubio González.

Los enunciados de la PEC se entrecomillan.

"El demógrafo Thomas Malthus realizó estudios sobre la evolución de la población humana. En su modelo sobre la evolución de la población se producía un fenómeno conocido como la catástrofe malthusiana (CM).

El modelo que propone Malthus es el siguiente:

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t) \qquad \frac{dA(t)}{dt} = kA_0 \qquad \propto(t) = \frac{A(t)}{P(t)}$$

Donde *P(t)* es la población humana en el año t, r es la tasa de crecimiento de la población, *A(t)* es la cantidad de alimentos disponibles para la población, *k* es la tasa de crecimiento de los alimentos, A_0 es la cantidad de alimentos disponibles para la población inicial P_0 (población en t=0) y $\propto(t)$ es la cantidad de alimentos disponibles por persona. De forma que cuando el valor de $\propto(t)$ es inferior a un cierto valor (a_{min}), el alimento mínimo que necesita una persona para sobrevivir, se producirá la CM."

ACTIVIDAD 1

Enunciado "Determinar, mediante integración directa en **Maxima** de las ecuaciones diferenciales del modelo, las expresiones para P(t) y A(t) en función de las condiciones iniciales y de las tasas de crecimiento. Observación: Si lo desean pueden contrastar sus resultados empleando las funciones específicas de resolución de ecuaciones diferenciales."

SOLUCIÓN

Cálculos a lápiz y papel

Resolvemos mediante integración directa la ecuaciones diferencial relativa a la población P(t)…

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t); \quad \frac{dP(t)}{P(t)} = rdt$$

$$\int_{Po}^{P} \frac{dP(t)}{P(t)} = \int_0^t r.dt\,; \qquad lnP\Big|_{P_0}^{P} = rt + c$$

$$t = 0, P = P_0 \rightarrow c = 0$$

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

… resultando un modelo exponencial para la población.

Realizamos lo mismo para la ecuación diferencial de la cantidad de alimentos A(t) …

$$\frac{dA(t)}{dt} = kA_0; \qquad \frac{dA(t)}{A_0} = kdt$$

$$\frac{1}{A_0}\int_{A_0}^{A} dA = \int_0^t kdt\,; \qquad A - A_0 = A_0(c + kt)$$

$$t = 0, A = A_0 \rightarrow c = 1$$

Cálculos en Maxima

El entorno de Máxima permite estructurar el código con una elegante indexación. En la Figura 1 se muestra cómo se ha hecho esto para la solución de la actividad 1.

```
ACTIVIDAD 1. SOLUCIONES MÁXIMA

(c) Andrés Martín Sánchez

1 CÁLCULO POR INTEGRACIÓN
  1.1 Población humana-P(t)
  1.2 Cantidad de alimentos disponibles-A(t)

2 CALCULO POR ECUACIONES DIFERENCIALES

Se contrastan en esta sección los resultados de 1.1 y 1.2,
vía ecuaciones diferenciales.

  2.1 Población humana-P(t)
  2.2 Cantidad de alimentos disponibles-A(t)
```

Figura 1. Índice en Maxima de las soluciones de la actividad 1

En las Figuras 2 y 3 desarrollamos el anterior esquema mostrando dos vías de cálculo de la función población y de alimentos a través de integración y mediante ecuaciones diferenciales, proporcionando una alternativa a la solución que pide el enunciado.

```
1 CÁLCULO POR INTEGRACIÓN

1.1 Población humana-P(t)

(%i1) kill(all);
(%o0) done

(%i1) integrate(1/P,P,P0,P);
Is P0-P positive, negative or zero?p;
Is P0 positive, negative or zero?p;
Is P positive, negative or zero?p;
(%o1) log(P)-log(P0)

(%i2) integrate(r,t,0,t);
(%o2) r t

(%i3) ec1:%o1=%o2;
(%o3) log(P)-log(P0)=r t

(%i4) ec2:solve(ec1,P);
(%o4) [P=%e^(r t) P0]

Este resultado coincide con los cálculos a mano,
confirmando que nuestro camino es el correcto.
```

```
1.2 Cantidad de alimentos
    disponibles-A(t)

(%i5) integrate(1/A0,A,A0,A);
(%o5) (A-A0)/A0

(%i6) integrate(k,t,0,t);
(%o6) k t

(%i7) ec3:%o5=%o6;
(%o7) (A-A0)/A0=k t

(%i8) ec4:solve(ec3,A);
(%o8) [A=(k t+1) A0]

También aquí, los resultados a mano
y a través de Máxima coinciden
```

Figura 2. Soluciones por integración en Maxima de la actividad 1

```
2 CALCULO POR ECUACIONES DIFERENCIALES

Se contrastan en esta sección los resultados de 1.1 y 1.2,
vía ecuaciones diferenciales.

2.1 Población humana-P(t)

(%i9) Poblacion:'diff(P,t)-r*P;
(%o9) d/dt P - r P

(%i10) sol:ode2(Poblacion,P,t);
(%o10) P=%c %e^(r t)

2.2 Cantidad de alimentos disponibles-A(t)

(%i11) Alimentos:'diff(A,t)-k*A0;
(%o11) d/dt A - k A0

(%i12) sol:ode2(Alimentos,A,t);
(%o12) A=k t A0+%c

(%i13) kill(all);
(%o0) done
```

Figura 3. Soluciones por cálculo diferencial en Maxima de la actividad 1

ACTIVIDAD 2

Enunciado "Calcular con Maxima el instante de tiempo de mayor bonanza, que corresponde al valor máximo de $\propto (t)$"

SOLUCIÓN

Cálculos a lápiz y papel

Con las expresiones de *P(t)* y *A(t)* anteriormente calculadas, obtenemos α(t) como

$$\propto (t) = \frac{A(t)}{P(t)} = \frac{A_0(1+kt)}{P_0.e^{rt}} = \frac{A_0}{P_0}.\frac{(1+kt)}{e^{rt}}$$

La derivada igualada a cero nos proporciona el extremo relativo en [0,∞)

$$\propto '(t) = \frac{A_0}{P_0}.\frac{k.e^{rt} - e^{rt}.r.(1+kt)}{e^{2rt}} = \frac{A_0}{P_0}.\frac{k - r(1+kt)}{e^{rt}}$$

$$\propto '(t) = 0 \to t = \frac{k-r}{kr}$$

Determinamos la naturaleza del extremo relativo, evaluando el signo de la primera derivada alrededor del punto crítico.

$$\alpha'(0) = \frac{A_0}{P_0}(k - r) > 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \alpha'(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{A_0}{P_0} . \frac{k - r(1 + kt)}{e^{rt}} = \lim_{t\to\infty} - \frac{A_0}{P_0} . \frac{-rkt}{e^{rt}} < 0$$

Como la derivada es positiva a la izquierda del punto crítico, y negativa a la derecha del mismo, pasa de ser creciente a decreciente en dicho punto, y el extremo relativo es un máximo relativo.

Cálculos en Maxima

En Maxima las soluciones se han estructurado según el índice de la Figura 4 (encabezados de los apartados en que se ha dividido la solución)

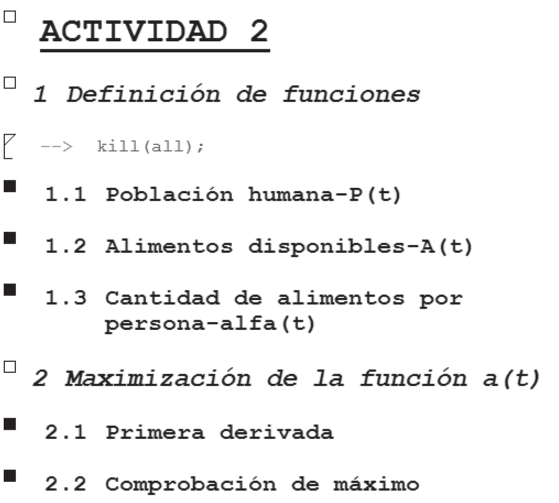


Figura 4. Índice en Maxima de las soluciones de la actividad 2

El código de las soluciones junto con los comentarios y la ejecución del mismo se muestran en las Figuras 5 y 6.

Así, en la Figura 5, se muestra el código donde se definen las funciones calculadas por cálculo infinitesimal en el apartado anterior y el ratio de alimentos por persona y en la Figura 6, se maximiza dicho ratio, constatando los cálculos a mano, tal como cabía esperarse.

ACTIVIDAD 2

1 Definición de funciones

```
(%i1) kill(all);
(%o0) done
```

1.1 Población humana-P(t)

Definimos P(t) aprovechando los cálculos resultantes de la actividad 1.1

```
(%i1) P(t):=P0*exp(r*t);
```

(%o1) $P(t):=P0\,\exp(r\,t)$

1.2 Alimentos disponibles-A(t)

Idem para A(t)

```
(%i2) A(t):=A0*(1+k*t);
```

(%o2) $A(t):=A0\,(1+k\,t)$

1.3 Cantidad de alimentos por persona-alfa(t)

a(t) es según el guión de la práctica el cociente entre las dos funciones anteriores...

```
(%i3) define(a(t),A(t)/P(t));
```

(%o3) $a(t):=\frac{(k\,t+1)\,\%e^{-r\,t}\,A0}{P0}$

Figura 5. Definición en Maxima de la función población, alimentos disponibles y cantidad de alimentos por persona de la actividad 2.

2 Maximización de la función a(t)

2.1 Primera derivada

Comprobamos que la función está bien definida,
verificando un valor arbitrario...

```
(%i4) a(0);
```

(%o4) $\dfrac{A0}{P0}$

Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

```
(%i5) diff(a(t),t,1);
```

(%o5) $\dfrac{k\,\%e^{-r\,t}\,A0}{P0}-\dfrac{r\,(k\,t+1)\,\%e^{-r\,t}\,A0}{P0}$

```
(%i6) ec5:solve(%o5=0,t);
```

(%o6) $[t=-\dfrac{r-k}{k\,r}]$

El valor de t es un extremo relativo.

2.2 Comprobación de máximo

Calculamos los valores de la función a
la izquierda y derecha del extremo relativo...

```
(%i7) limit(%o5, t, 0);
```

(%o7) $-\dfrac{(r-k)\,A0}{P0}$

```
(%i8) limit(%o5, t, inf);
Is r positive, negative or zero?p
```

Como la función pasa de ser creciente
(derivada positiva)a tender asintóticamente
al cero, el extremo relativo es un máximo.

Figura 6. Maximización en Maxima de la función alfa (t) de la actividad 2

ACTIVIDAD 3

Enunciado "Representar gráficamente en Maxima P(t), A(t) y $\propto(t)$ para los siguientes parámetros y condiciones iniciales:

$$P_0=7\cdot 10^9 \text{ [personas]}$$
$$r=0.04 \text{ [1/año]}$$
$$A_0=1\cdot 10^{12} \text{ [kg de alimentos]}$$
$$k=0.2 \text{ [1/año]}$$

Y utilícelas para justificar si, suponiendo que cada persona necesita un mínimo de 100 kg de alimentos, se producirá CM y cuándo."

SOLUCIÓN

Gráficos con Maxima

Seguimos el esquema en que hemos mostrado las soluciones a las anteriores actividades; es decir, el índice en Maxima y luego el desarrollo de dicho índice (ver Figura 7).

```
ACTIVIDAD 3

Utilizando las funciones obtenidas en el apartado 1.1,
representamos gráficamente las tres funciones, para los
parámetros dados.

--> kill(all);

1 Población humana-P(t)

2 Alimentos disponibles-A(t)

3 Cantidad de alimentos por persona-a(t)
```

Figura 7. Índice soluciones en Maxima de la actividad 3

En la Figura 8 se muestra el código y la representación gráfica de la población.

```
ACTIVIDAD 3

Utilizando las funciones obtenidas en el apartado 1.1,
representamos gráficamente las tres funciones, para los
parámetros dados.

--> kill(all);

1 Población humana-P(t)

(%i1) P(t):=P0*exp(r*t);
(%o1) P(t):=P0 exp(r t)

(%i2) P0:7*10^9;
(%o2) 7000000000

(%i3) r:0.04;
(%o3) 0.04
```

```
(%i4) wxplot2d([P(t)],[t,0,100],[gnuplot_preamble,"set grid;"])$
(%t4)
```

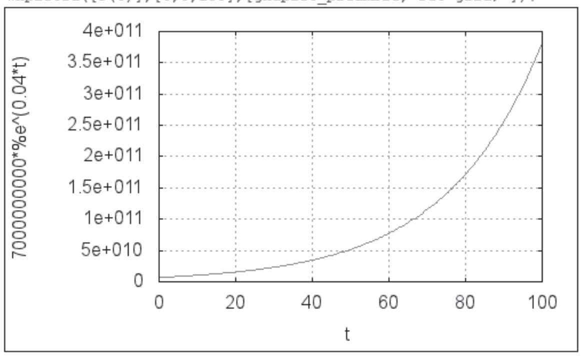


Figura 8. Cálculos de la población humana en Maxima de la actividad 3

Idénticamente, se muestra en la Figura 9 el código y la representación gráfica de la función de alimentos.

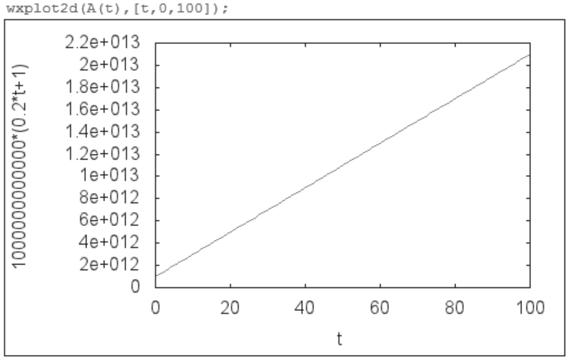
2 Alimentos disponibles-A(t)

```
(%i5) A(t):=A0*(1+k*t);
(%o5) A(t):=A0(1+k t)

(%i6) A0:1*10^12;
(%o6) 1000000000000

(%i7) k:0.2;
(%o7) 0.2

(%i8) wxplot2d(A(t),[t,0,100]);
(%t8)
```




```
(%o8)
```

Figura 9. Cálculos de los alimentos en Maxima de la actividad 3

Finalmente, se define el ratio de alimentos por persona y su representación gráfica en Maxima (ver Figura 10). Como comentarios al código, se concluye el tiempo de ocurrencia de CM que pide el enunciado.

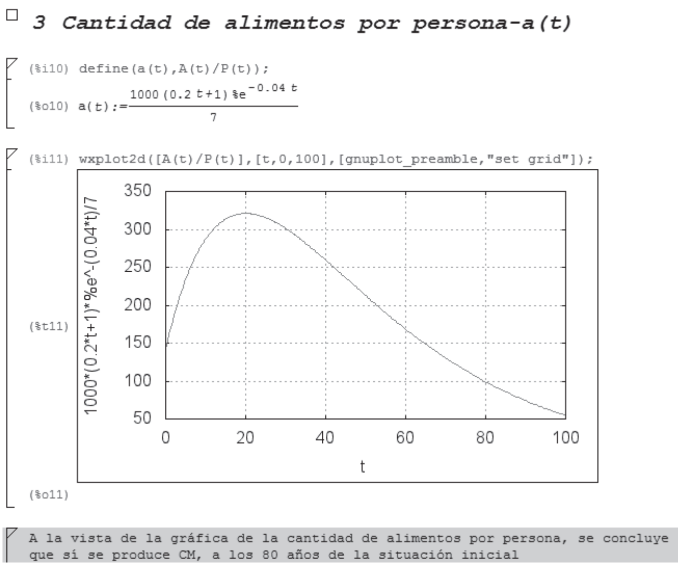


Figura 10. Cálculos del ratio de alimentos por persona en Maxima de la actividad 3

Gráficos con Geogebra

Adicionalmente puede recrearse la situación en Geogebra con la siguiente solución (ver Figura 11), que coincide con la calculada en Maxima (ocurrencia de CM a los 80 años).

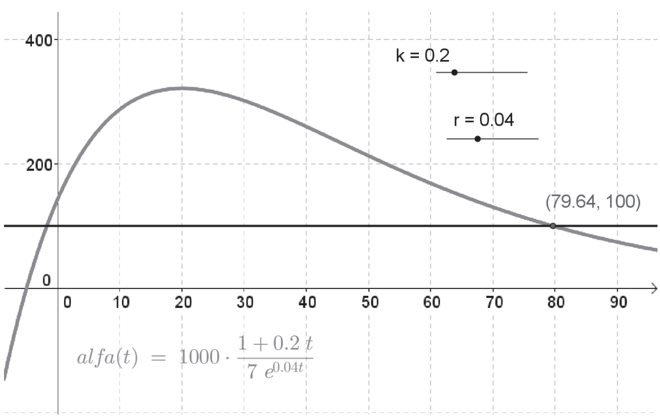


Figura 11. Solución Geogebra actividad 3

ACTIVIDAD 4

Enunciado "Recrear gráficamente otras situaciones, en primer lugar con distintos valores de k (0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1), incluyendo el valor del apartado anterior. Y en segundo lugar con distintos valores de r (0.03, 0.04, 0.05, 0.06). ¿Se producirá CM y cuando? Hacer un programa en Scilab que permita realizar dichos cálculos de manera numérica. ¿Cómo afectan los parámetros en el tiempo (t_{cm}) en el que se produce la CM?"

SOLUCIÓN

Cálculos con Máxima

Previo a la resolución en Scilab, planteamos la resolución en Maxima en las Figuras 12, 13, 14, 15 y 16.

```
ACTIVIDAD 4

(c) Andrés Martín

 -->  kill(all);

1 Declaración de constantes iniciales

2 Recreación gráfica de distintas situaciones

Para la población, alimentos y ratio de alimentos definimos
funciones a partir de la resolución de las ecuaciones diferenciales
de los apartados anteriores, pero haciendolas depender de k y r, para poder
recrear las situaciones gráficas.

 2.1 Población-P(r,t)

 2.2 Alimentos-A(k,t)

 2.3 Ratio de alimentos-alfa(k,r,t)
```

Figura 12. Índice Maxima soluciones actividad 4

```
1 Declaración de constantes iniciales

(%i1) P0:7*10^9;
(%o1) 7000000000

(%i2) A0:1*10^12;
(%o2) 1000000000000
```

Figura 13. Declaración constantes iniciales en Maxima soluciones actividad 4

2 Recreación gráfica de distintas situaciones

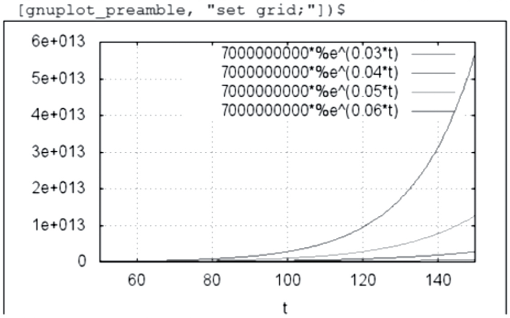
```
Para la población, alimentos y ratio de alimentos definimos
funciones a partir de la resolución de las ecuaciones diferenciales
de los apartados anteriores, pero haciendolas depender de k y r,
para poder recrear las situaciones gráficas.
```

2.1 Población-P(r,t)

```
(%i3) P(r,t):=P0*exp(r*t);
(%o3) P(r,t):=P0 exp(r t)
```

```
(%i4) wxplot2d([P(0.03,t),P(0.04,t),P(0.05,t),P(0.06,t)], [t,50,150],
       [gnuplot_preamble, "set grid;"])$
```

(%t4)



2.2 Alimentos-A(k,t)

```
(%i5) A(k,t):= A0*(1+k*t);
(%o5) A(k,t):=A0(1+k t)
```

```
(%i6) wxplot2d([A(0,t),A(0.2,t),A(0.4,t),A(0.6,t),A(0.8,t),A(1,t)], [t,0,100],
       [gnuplot_preamble, "set grid;"])$
```

(%t6)

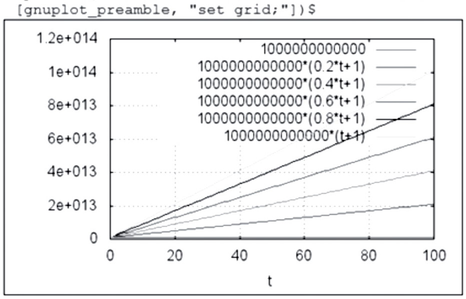


Figura 14. Recreación en Maxima ley de población y alimentos actividad 4

2.3 Ratio de alimentos-alfa(k,r,t)

```
(%i7) kill(k);
(%o7) done
```

```
(%i8) alfa(k,r,t):=A(k,t)/P(r,t);
```

$$\text{(\%o8)}\quad \mathrm{alfa}(k,r,t) := \frac{A(k,t)}{P(r,t)}$$

```
(%i9) wxplot2d([alfa(0,0.04,t),alfa(0.2,0.04,t),
      alfa(0.4,0.04,t),alfa(0.6,0.04,t),alfa(0.8,0.04,t),
      alfa(1,0.04,t)], [t,0,150],
       [gnuplot_preamble, "set grid;"])$
```

(%t9)

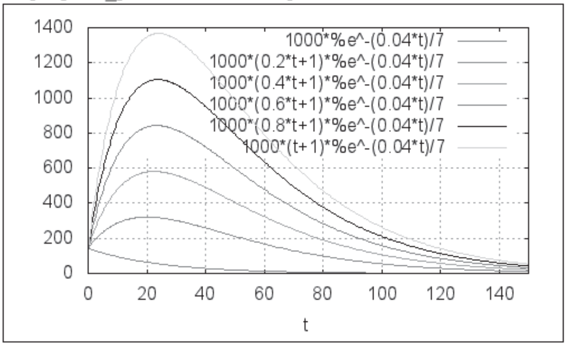
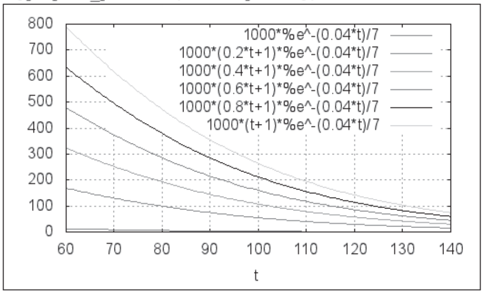


Figura 15. Representación gráfica en Maxima ratio de alimentos actividad 4

```
A la vista de la recreación gráfica de los distintos valores de k, se concluye
 que para k<>0 la CM se produce a partir de t=60 años. Para precisar el momento,
utilizamos un escalado de los instantes del t=60 a 150 años.
```

```
(%i10) wxplot2d([alfa(0,0.04,t),alfa(0.2,0.04,t),alfa(0.4,0.04,t),
       alfa(0.6,0.04,t),alfa(0.8,0.04,t),alfa(1,0.04,t)], [t,60,140],
        [gnuplot_preamble, "set grid;"])$
```

(%t10)



A la vista del escalado se concluye que se produce CM en el instante

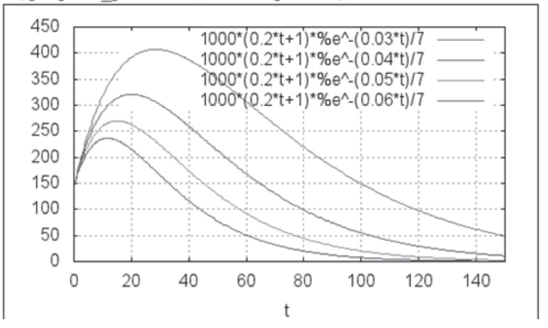
t(años)	k
80	0.2
100	0.4
115	0.6
125	0.8
>130	1

Figura 16. Conclusión Maxima Ocurrencia CM actividad 4 (r=0,04)

Se muestra en la Figura 17 la parte de código de Maxima en que se calcula y se justifica la ocurrencia de catástrofe malthusiana para k=0,2

```
(%i11) wxplot2d([alfa(0.2,0.03,t),
       alfa(0.2,0.04,t),
       alfa(0.2,0.05,t),
       alfa(0.2,0.06,t)], [t,0,150],
        [gnuplot_preamble, "set grid;"])$
```

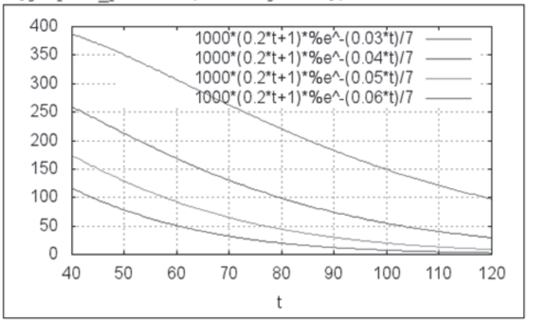
(%t11)




```
Al igual que en la recreación anterior, para los distintos valores de r,
concluimos de la gráfica general que la CM no se produce antes de t=40,
 de modo que escalamos la gráfica a partir de este valor.
```

```
(%i12) wxplot2d([alfa(0.2,0.03,t),alfa(0.2,0.04,t),alfa(0.2,0.05,t),
       alfa(0.2,0.06,t)], [t,40,120],
        [gnuplot_preamble, "set grid;"])$
```

(%t12)




```
A la vista del escalado se concluye que se produce CM en los instantes
                t(años)      r
                  43        0.06
                  57        0.05
                  79        0.04
                 120        0.06
con una tolerancia de error de +-3 años
```

Figura 17. Gráfica y Conclusión Maxima Ocurrencia CM actividad 4 (k=0,2)

Cálculo con Scilab

Los cálculos en Maxima realizados anteriormente no son más que una guía para la resolución en Scilab que es lo que realmente pide la actividad.

Para dicha resolución, se define una función que utiliza el clásico método de la bisección de cálculo numérico para obtener la raíz de una función en un intervalo dado (ver Figura 18).

```
//******************ACTIVIDAD 4******************************//
clc
// 1. DEFINICIÓN FUNCIÓN BISECCIÓN
// Definimos la función bisección a partir de los apuntes del tema4 ...
function x2 = biseccion(f,a,b,niteraciones,precision)
    n=0,x0=a,x1=b
    while n<niteraciones & abs(x1-x0)>precision
        n=n+1, x2=(x0+x1)/2, x=x0
        f0=evstr(f), x=x2, f2=evstr(f)
        if f2==0 then
            disp("Tras"), disp(n),disp("iteraciones")
            disp("la solución exacta es"),disp(x2)
            return
        elseif f2*f0<0 then
            x1=x2
        else
            x0=x2
        end
     end
        if n==niteraciones then
            disp("No alcanzamos la solución con la precisión deseada")
            disp("La aproximación es")
        else
        disp("El tiempo de CM es..")
        end
        disp(x2);
endfunction
```

Figura 18. Código auxiliar de la función bisección en Scilab de la actividad 4

La función anterior se utilizará en las siguientes líneas de código (ver Figuras 19 y 20) para calcular los tiempos en que se produciría la catástrofe malthusiana a partir del ratio de alimentos por persona para los distintos valores de k y r que pide el enunciado, almacenando los resultados en un array y mostrando los resultados.

```
// 2. BUCLE DE CÁLCULO
// Creamos un array 6*4 para almacenar los tiempos de CM correspondientes
// a los 24 combinaciones (k,r)con k=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 y 1;
// r= 0.03, 0.04, 0.05, 0.06
Tiempos_de_CM = cell(6,4)
// Calculamos los distintos tiempos de CM para los pares (k,r) anteriores
for j=1:6
    // Vamos recorriendo los valores de k, a partir del indice entero j
    k=0+(j-1)*0.2
    disp("k"),disp(k)
    for i=1:4
     r=0.03+(i-1)*0.01
     disp("r"),disp(r)
     //Utilizamos la función bisección, con la función A(k,r,t)/P(k,r,t)
     //con (k,r) recorriendo 24 posibilidades
     // Los extremos del intervalo son 0 y 160, garantizando diferencias
     // de signo en los extremos para todos los casos
     // La precisión de cálculo es un año. Una precisión mayor es innecesaria.
     biseccion('[1*10^12*(1+k*x)]/[7*10^9*exp(x*r)]-100',0,160,50,1)
     // Vamos almacenando los distintos tiempos en el array Tiempos_de_CM
     Tiempos_de_CM(j,i).entries = ans
    end
end
// Este display nos da los tm de CM para los distintos valores de k y r
disp('La siguiente matriz muestra los tiempos de CM ' )
disp('para las combinaciones (k,r)')
disp('con k=0;0,2;0,4;0,6;0,8;1 ')
disp(' y r=0.03;0.04;0.05.')
```

Figura 19. Bucle de cálculo en Scilab de la actividad 4

```
// 3. TIEMPOS DE CM E INFLUENCIA DE PARAMETROS
// Aquí mostramos los tiempos de CM que nos interesan,
//es decir los que pide el enunciado del apartado
disp("Para k=0,2 los tiempos correspondientes ")
disp('a los distintos r -0.03,0.04,0.05,0.06- son')

disp(Tiempos_de_CM(2,1)),disp(Tiempos_de_CM(2,2))
disp(Tiempos_de_CM(2,3)),disp(Tiempos_de_CM(2,4))
disp("Para r=0,04 los tiempos correspondientes ")
disp('a los distintos k -0,0.2,0.4,0.6,0.8 y 1- son')
disp(Tiempos_de_CM(1,2)),disp(Tiempos_de_CM(2,2))
disp(Tiempos_de_CM(3,2)),disp(Tiempos_de_CM(4,2))
disp(Tiempos_de_CM(5,2)),disp(Tiempos_de_CM(6,2))
//Gráficamos la información anterior, para ilustrar
//la influencia de k y r en los tiempos de CM
clf
//x=[0.03,0.04,0.05,0.06],y=[120,80,58,44], plot(x,y)
x=[0.03:0.01:0.06],y=[120,80,58,44], plot(x,y)
xgrid()
xtitle('INFLUENCIA DE r SOBRE LOS TIEMPOS DE CM','Valores de r','Tiempo en años')
halt('Presiona una tecla para visualizar la otra gráfica')
clf
//x=[0,0.2,0.4,0.6,0.8,1],y=[9,79,102,115,124,130], plot(x,y)
x=[0:0.2:1],y=[9,79,102,115,124,130], plot(x,y)
xgrid()
xtitle('INFLUENCIA DE k SOBRE LOS TIEMPOS DE CM','Valores de k', 'Tiempo en años')
```

Figura 20. Cálculo de tiempos de CM en Scilab de la actividad 4

Mostramos los resultados del bucle (ver Figuras 21 a 26) que recorre los tiempos para las combinaciones (k,r) –las mostramos en columnas por facilitar la visualización aunque en la consola aparezca un resultado tras otro–.

```
Consola de Scilab

k

   0.

r

   0.03

El tiempo de CM es..

   11.875

r

   0.04

El tiempo de CM es..

   9.375
```

```
Consola de Scilab

k

   0.2

r

   0.03

El tiempo de CM es..

   119.375

r

   0.04

El tiempo de CM es..

   79.375
```

```
Consola de Scilab

k

   0.4

r

   0.03

El tiempo de CM es..

   148.125

r

   0.04

El tiempo de CM es..

   101.875
```

```
r

   0.05

El tiempo de CM es..

   6.875

r

   0.06

El tiempo de CM es..

   5.625
```

```
r

   0.05

El tiempo de CM es..

   58.125

r

   0.06

El tiempo de CM es..

   44.375
```

```
r

   0.05

El tiempo de CM es..

   75.625

r

   0.06

El tiempo de CM es..

   59.375
```

Figura 21. Display de los tiempos de CM para k=0, k=0.2 y k=0.4

```
Consola de Scilab

k

   0.6

r

   0.03

El tiempo de CM es..

   159.375

r

   0.04

El tiempo de CM es..

   115.625

r

   0.05

El tiempo de CM es..

   86.875

r

   0.06

El tiempo de CM es..

   68.125
```

```
Consola de Scilab

k

   0.8

r

   0.03

El tiempo de CM es..

   159.375

r

   0.04

El tiempo de CM es..

   124.375

r

   0.05

El tiempo de CM es..

   93.125

r

   0.06

El tiempo de CM es..

   74.375
```

```
Consola de Scilab

k

   1.

r

   0.03

El tiempo de CM es..

   159.375

r

   0.04

El tiempo de CM es..

   130.625

r

   0.05

El tiempo de CM es..

   99.375

r

   0.06

El tiempo de CM es..

   79.375
```

Figura 22. Display de los tiempos de CM para k=0.6, k=0.8 y k=1

```
La siguiente matriz muestra los tiempos de CM
para las combinaciones (k,r)
con k=0;0,2;0,4;0,6;0,8;1
 y r=0.03;0.04;0.05.

!11.875   9.375    6.875   5.625   !
!                                  !
!119.375  79.375   58.125  44.375  !
!                                  !
!148.125  101.875  75.625  59.375  !
!                                  !
!159.375  115.625  86.875  68.125  !
!                                  !
!159.375  124.375  93.125  74.375  !
!                                  !
!159.375  130.625  99.375  79.375  !
```

Figura 23. Matriz de tiempos de CM para las combinaciones de k y r de la actividad 4

```
Consola de Scilab
Para k=0,2 los tiempos correspondientes

a los distintos r -0.03,0.04,0.05,0.06- son


119.375


79.375


58.125


44.375
```

```
Para r=0,04 los tiempos correspondientes

a los distintos k -0,0.2,0.4,0.6,0.8 y 1- son


9.375


79.375


101.875


115.625


124.375


130.625
```

Figura 24. Display en Scilab de los tiempos de CM de la actividad 4

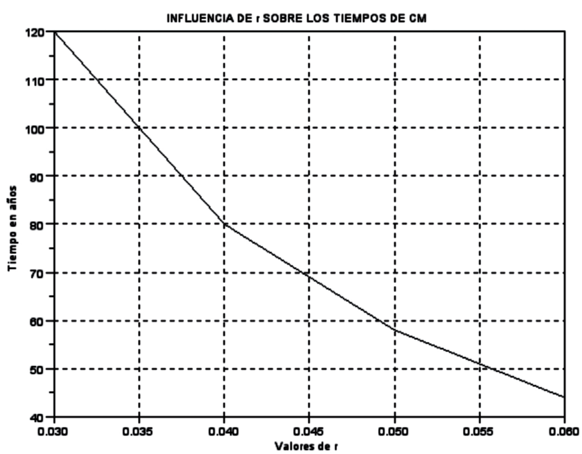


Figura 25. Gráfica en Scilab de la influencia de r sobre los Tiempos de CM

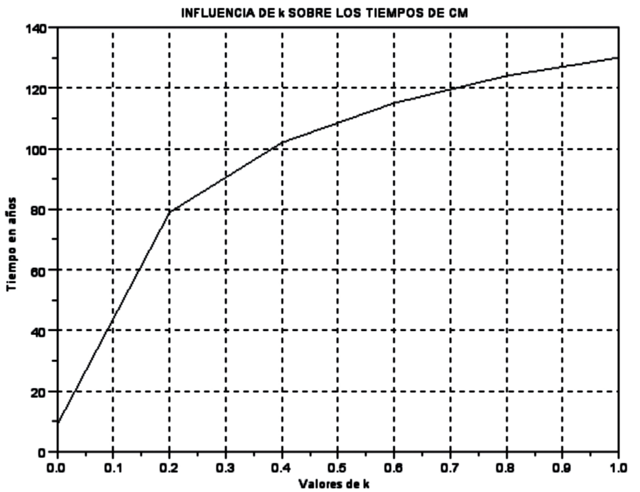


Figura 26. Gráfica en Scilab de la influencia de k sobre los Tiempos de CM

Gráficos con Geogebra

En Geogebra, se puede resolver gráficamente el apartado con la función deslizador y activando el rastro tal como se muestra en las Figuras 27 y 28.

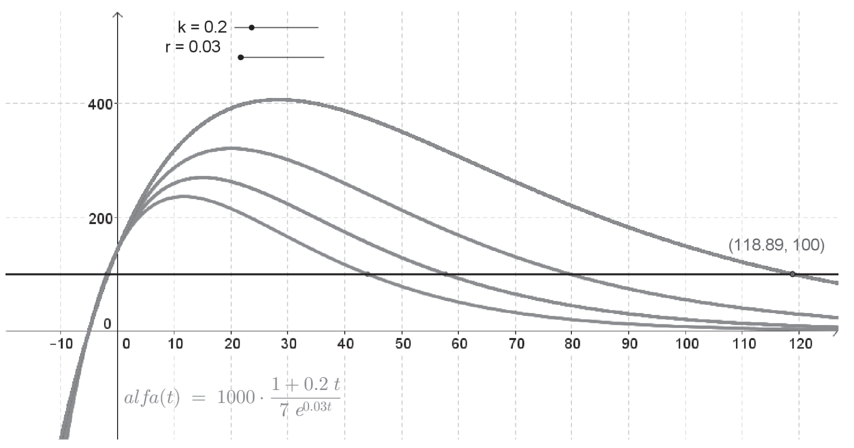


Figura 27. Solución en Geogebra de la actividad 4 para k=0,2

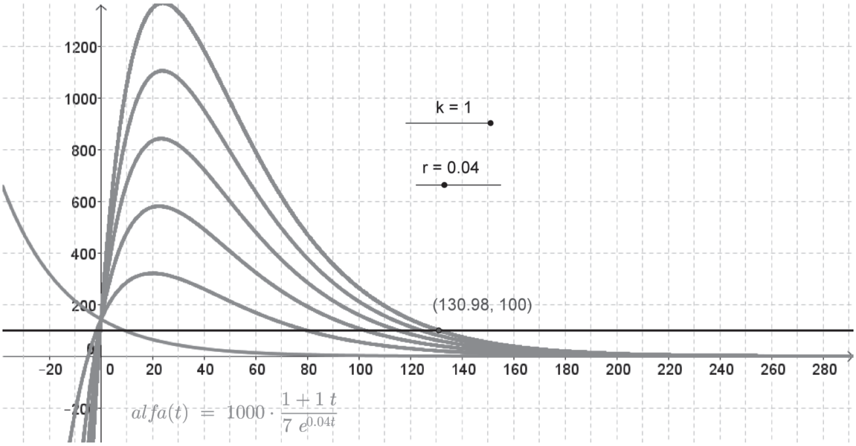


Figura 28. Solución en Geogebra de la actividad 4 para r=0,04

Gráficos con una hoja de cálculo

En las Figuras 29 y 30 se grafican en una hoja de cálculo todas las situaciones de ratio de alimentos por persona para los distintos valores de k (0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1) y r (0,03, 0,04, 0,05 y 0,06).

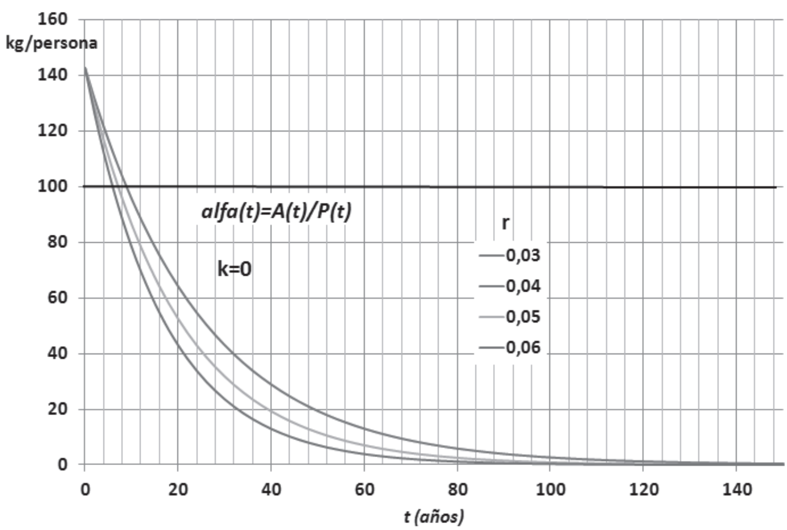


Figura 29. Gráfica hoja de cálculo ratio de alimentos k=0

La gráfica del ratio de alimentos para k=0,2 confirma uno de los cálculos de Scilab que pide el enunciado, en que los tiempos de ocurrencia de catástrofe malthusiana para los distintos valores de r (0,03, 0,04, 0,05 y 0,06) son 119, 79, 58 y 44 años aproximadamente.

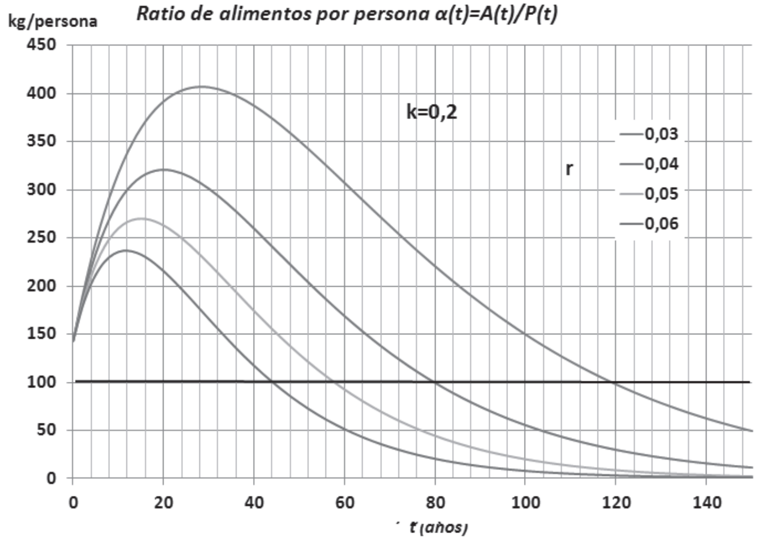


Figura 30. Gráfica hoja de cálculo ratio de alimentos k=0,2

En el haz de gráfica del ratio de alimentos para k=0,4 (ver Figura 31) la intersección de la gráfica para r=0,04 (línea roja) y un ratio de 100 kg/persona confirma los cálculos de Scilab de que el tiempo de ocurrencia de CM para dicha combinación (k=0,4 y r=0,04) se produce aproximadamente a los 101 años.

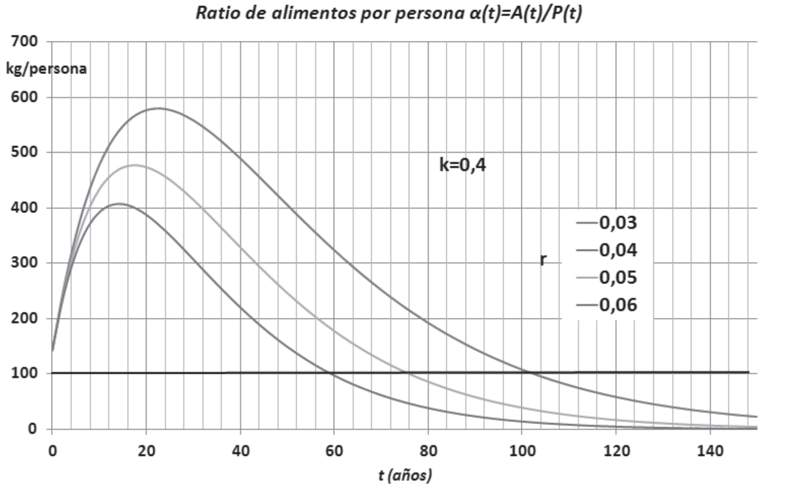


Figura 31. Gráfica hoja de cálculo ratio de alimentos k=0,4

La siguiente gráfica (ver Figura 32) confirma que el tiempo de ocurrencia de CM para la combinación r=0,04 y k=0,6 se produce aproximadamente a los 116 años.

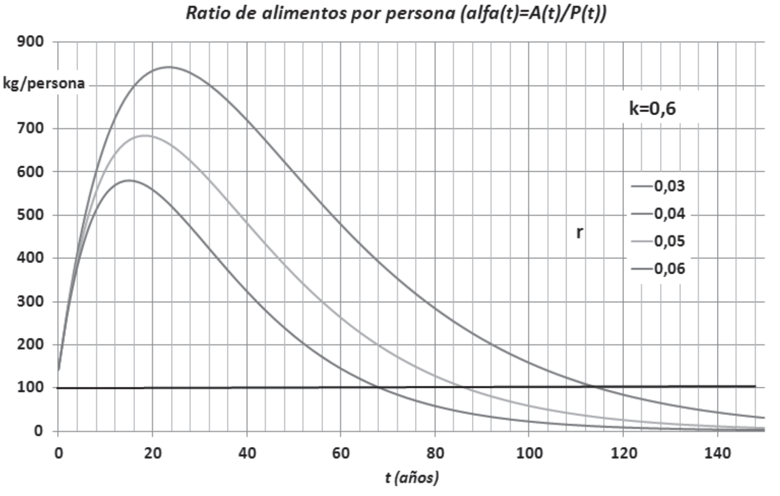


Figura 32. Gráfica hoja de cálculo ratio de alimentos k=0,6

Las Figuras 33 y 34 recrean gráficamente en Geogebra el ratio de alimentos para k=0,8 y k=1.

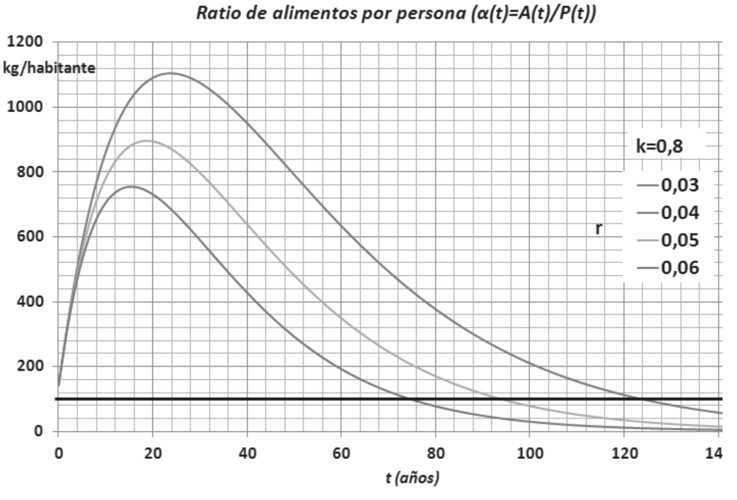


Figura 33. Gráfica hoja de cálculo ratio de alimentos k=0,8

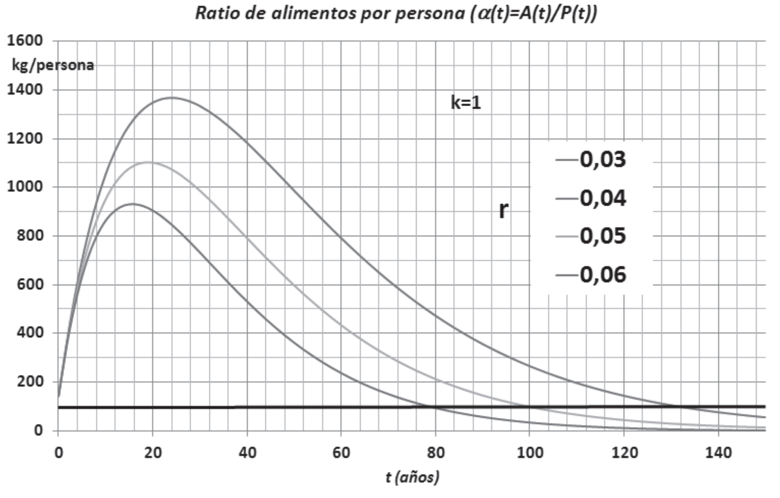


Figura 34. Gráfica hoja de cálculo ratio de alimentos k=1

ACTIVIDAD 5

Enunciado "Manteniendo las condiciones del apartado 3, ¿qué valor debería tener la tasa r para que la CM se produjera dentro de 100 años? Emplear Scilab para calcularlo"

SOLUCIÓN

Cálculo con lápiz y papel

Se trata de resolver la siguiente ecuación

$$\frac{1.10^{12}}{7.10^{9}}\cdot\frac{21}{e^{100r}} = 100;\;\; 3000.e^{-100r} = 100;\; e^{-100r} = \frac{1}{30}$$

… que se resuelve, tomando logaritmos:

$$-100r = ln\frac{1}{30}; r = 0{,}034.$$

Cálculo con Scilab

```
*T1_Act_5.sci
//*****************************************************
//       ACTIVIDAD 5
//*****************************************************
funcprot(0)
clc

// 1. FUNCIÓN BISECCIÓN

// Incorporamos para la resolución de este apartado, la
// definición de la función biseccion que ya se había
// utilizado en el apartado 4
//
```

Figura 35. Comentario código función bisección

(Aquí el código reproduce la misma función bisección del apartado 4-Figura 22)

```
// 2. CÁLCULO DE r

// A diferencia sin embargo de la actividad 1.4, en que nos pedían determinar
// un tiempo de CM, en esta actividad, el tiempo nos es dado (100 años),
// y hay que determinar la r para que esto se produzca.

// Para ello, igualamos alfa(100,0,2,r) a 100, en que alfa=alfa(t,k,r) e la ratio
// de alimentos por persona que depende del tiempo t, k y r, tal como se dedujo
// en el apartado 1.
// Es decir alfa(100,0.2,r)= []1.10^12/(7*10^6)]*[(1+0.2*100)/exp(100*r)] ha de
// ser igual a  100 que es el ratio mínimo de alimentos por persona para sobrevivir
// La función así obtenida es la primera variable de la función bisección, en
// que la x representa a la r.
// Dado que la r es un valor entre 0 y 1, éstos son los extremos del intervalo
// a y b donde tengo acotada solución. El que el signo de la función sea diferente
// en los extremos del intervalo, lo garantiza la información obtenida del apartado 4
// Finalmente, la precisión es 0.01 dado que los valores de r que hemos manejado
// en el trabajo, tiene dos cifras decimales

biseccion('[21*10^12]/[7*10^9*exp(100*x)]-100',0,1,50,0.01);
```

Figura 36. Código scilab cálculo r actividad 5

La ejecución del código da el resultado esperado, tras los cálculos con lápiz y papel, tal como se muestra en la Figura 37.

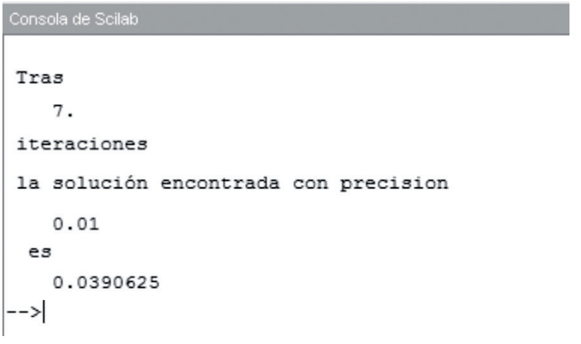


Figura 37 Ejecución scilab cálculo r actividad 5

CONCLUSIONES

En este trabajo de la asignatura Herramientas Informáticas para las Matemáticas se pide calcular con Maxima y Scilab el modelo de Malthus de población y cantidad de alimentos y la razón entre ambos.

- En el punto 1, se confirman con Maxima la expresión de la población (P(t)) y la cantidad de alimentos (A(t)) , calculada con lápiz y papel:

$$P(t) = P_0 e^{rt}; \quad A(t) = A_0(1 + kt)$$

- En el punto 2, se calcula el máximo de la función α(t)=A(t)/P(t), a través de Máxima, confirmando los cálculos manuales:

$$t = \frac{k - r}{kr}$$

- En el punto 3, se grafican en Maxima las funciones de P(t), A(t) y α(t), para lo valores de k=0,2 y r=0.04 y se concluye que para dichos valores se produce catástrofe malthusiana (CM), es decir, α(t)<100 kg/persona, a los 80 años.
- En el punto 4, se recrean gráficamente en Máxima otras situaciones para distintos valores de k y r, y en Scilab se ha calculado mediante el algoritmo de bisección de cálculo numérico, los tiempos en que se produce CM, que son 120 años, 79 años, 58 años y 44 años para k=0,2 y r=0,03 hasta 0,06 respectivamente. Por otra parte para r=0,04 y k=0, k=0.4, k=0.6, k=0.8 y k=1 son los tiempos 9 años, 102 años, 116 años, 124 años y 131 años respectivamente. Estos tiempos de CM ilustrados gráficamente mediante Scilab, permiten concluir la influencia de los valores de k crecientes y r decrecientes en el aumento de los tiempos de CM (como cabía esperar de la expresión de α(t)).
  Los cálculos se han confirmado con Geogebra y la hoja de cálculo
- En el punto 5, se vuelve a utilizar el algoritmo de la bisección en Scilab, para determinar el valor de r en que se produce CM para t=100 años, confirmando el valor obtenido mediante calculo manual con un r de 0,034.

En definitiva, el trabajo muestra las potencialidades de Máxima y Scilab como herramienta de cálculo simbólico y numérico respectivamente (que se han complementado con las herramientas de Geogebra y la hoja de cálculo) aplicado a eventuales casos de catástrofe malthusiana.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARENAZ, MANUEL (2013). *Tema 4: Programación Orientada a Resolución de Problemas (4.1) Conceptos de Algoritmo, Función, Programa y Librería*. [Tutoría Intercampus de Herramientas Informáticas para Matemáticas]. UNED

BAUDIN, MICHAËL (2011). *Introduction to Scilab*. The Scilab Consortium. Disponible en http://www.scilab.org.

FRAILE MARINERO, JUAN CARLOS (2013). *Tema 4.- Programación orientada a la resolución de problemas*. [Tutoría Intercampus de Herramientas Informáticas para Matemáticas]. UNED Palencia.

FRANCO, DANIEL (2013). *Tema 2: Ficheros ejecutables Scilab y Maxima* [Apuntes asignatura Herramientas Informáticas para Matemáticas]. UNED

FRANCO, DANIEL (2012). *Tema 3: Cálculos Matemáticos Básicos*. [Tutoría Intercampus Herramientas Informáticas para Matemáticas]. UNED

MORILLA GARCÍA, FERNANDO, RUBIO GONZÁLEZ, MIGUEL ANGEL (2012). *Apuntes elaborados por el equipo docente para la asignatura Herramientas Informáticas para Matemáticas*. UNED

RODRÍGUEZ RIOTORTO, MARIO (2011). *Primeros pasos en Maxima*. Disponible en http://riotorto.users.sourceforge.net.